PROGRESIONES ARITMETICAS

1. De entre las sucesiones siguientes decir cuáles son progresiones aritméticas:

a. 4, 8, 12, 16, 20, ...
b. 4, –7, 14, –21, ...
c. 27, 23, 19, 15, 11, ...
d. 5a, 7a, 9a, 11a, ...
e. $1/2, 2/3, 3/4, 5/5, \dots$
f. 5a, 5a –3, 5a –6, 5a –9, …
g. 64, –16, 4, –1,...
h. (a + b), 2(a +b), 3(a +b), ...

Solución.

Los términos de una sucesión están en progresión aritmética si la diferencia entre términos consecutivos es constante.

a. 4, 8, 12, 16, 20, ...: **SI**

$$8-4=12-8=16-12=20-16=4=\text{CTE. d (diferencia)}=4$$

b. 4, –7, 14, –21, ...: **NO**

$-7-4 \neq 14-(-7)$ Basta con que se incumpla una vez.

c. 27, 23, 19, 15, 11, ...: **SI**

$$23-27=19-23=15-19=11-19=-4=\text{CTE. d (diferencia)}=-4$$

d. 5a, 7a, 9a, 7a, 11a, ...: **SI**

$$7a-5a=9a-7a=11a-9a=2a=\text{CTE. d (diferencia)}=2a$$

e. $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots$: **NO**

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\neq\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$$

f. 5a, 5a –3, 5a –6, 5a –9, …: **SI**

$$5a-3-5a=5a-6-(5a-3)=5a-9-(5a-6)=-3=\text{CTE. d (diferencia)}=-3$$

g. 64, 16, 4, 1, …: **NO**

$$16-64\neq 4-16$$

h. (a + b), 2(a +b), 3(a +b), ...: **SI**

$$2(a+b)-(a+b)=3(a+b)-2(a+b)=(a+b)=\text{CTE. d (diferencia)}=(a+b)$$

2. En una progresión aritmética el primer término es 5 y la diferencia 4. Hallar el quinto término.

Solución.

El término general de una progresión aritmética es:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d=\left\{\begin{matrix}a_1=5\\ d=4\end{matrix}\right\}=5+(n-1)\cdot 4=4n+1$$

$$a_5=4\cdot 5+1=21$$

3. Calcular la diferencia de la progresión aritmética cuyo primer término es 12, el último 42 y el número de términos 11.

Solución.

Se aplica la definición de término general $\left(a_n=a_1+(n-1)\cdot d\right)$ al término 11:

$$a_{11}=a_1+(11-1)\cdot d\quad:\quad a_{11}=a_1+10d$$

$$\left.\begin{matrix}a_{11}=42\\ a_1=12\end{matrix}\right\}:42=12+10d\quad:\quad d=\frac{42-12}{10}=3$$

4. Hallar el número de términos de una progresión aritmética cuyo último y primer término son, respectivamente, 126 y 42, y la diferencia 7.

Solución.

Se aplica la definición de término general $\left(a_n = a_1 + (n-1)\cdot d\right)$, tomando 126 como término enésimo:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d : \left\{\begin{array}{l} a_1 = 42 \\ a_n = 126 \\ d = 7 \end{array}\right\} : 126 = 42 + (n-1)\cdot 7$$

$$n - 1 = \frac{126-42}{7} = 12 \ : \ n = 13$$

5. Interpolar:

a. Diez medios diferenciales entre 4 y 26.

b. Siete medios diferenciales entre 7 y –9.

Solución.

Se conoce el primer término, el último, y la posición que ocupa este, solo necesitamos calcular la diferencia, se aplica la definición de término general al último y se despeja la diferencia.

a. $a_1 = 4, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}}_{\text{10 términos}}, a_{12} = 26$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$\text{Para } n = 12\text{: } a_{12} = a_1 + (12-1)\cdot d$$

$$26 = 4 + 11d \ : \ d = \frac{26-4}{11} = 2$$

$$a_1 = 4, \underbrace{6, 8 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24}_{\text{10 términos}}, 26$$

b. $a_1 = 7, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}_{\text{6 términos}}, a_8 = -9$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$\text{Para } n = 8\text{: } a_8 = a_1 + (8-1)\cdot d$$

$$-9 = 7 + 7d \ : \ d = \frac{-9-7}{7} = -\frac{16}{7}$$

$$7, \underbrace{\frac{33}{7}, \frac{17}{7}, \frac{1}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{-31}{7}, \frac{-47}{7}}_{\text{6 términos}}, -9$$

6. Calcular la suma de:

a) Los 50 primeros términos de la progresión 36, 30, 24,...

b) Los veinte primeros términos de la progresión $4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$

c) Los diez primeros términos de la progresión $-5/2, -1/2, 3/2, \ldots$

Solución.

La suma de n términos de una progresión aritmética viene dada por la expresión:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

a. 36, 30, 24,... Progresión aritmética: $a_1 = 36$; $d = -6$

$$S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2}\cdot 50$$

Para calcular a_{50} se aplica la definición de término general.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 36 + (n-1)\cdot(-6) = 42 - 6n$$

$$a_{50} = 42 - 6\cdot 50 = -258$$

$$S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2}\cdot 50 = \frac{36 + (-258)}{2}\cdot 50 = -5550$$

b. $4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$ Progresión aritmética: $a_1 = 4$; $d = \frac{1}{2}$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}\cdot 20$$

Para calcular a_{20} se aplica la definición de término general.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 4 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n+7}{2}$$

$$a_{20} = \frac{20+7}{2} = \frac{27}{2}$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}\cdot 20 = \frac{4 + \frac{27}{2}}{2}\cdot 20 = 175$$

7. Calcular la suma de los n primeros números:

a) naturales
b) pares
c) impares.

Solución.

Se aplica la definición de suma de n términos y se ordena.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

a. Naturales: Término general: $a_n = n$; $a_1 = 1$

$$S_n = \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{1}{2}n\cdot(n+1)$$

b. Pares: Término general: $a_n = 2n$; $a_1 = 2$

$$S_n = \frac{2+2n}{2}\cdot n = n\cdot(n+1)$$

c. Impares: Término general: $a_n = 2n-1$; $a_1 = 1$

$$S_n = \frac{1+2n-1}{2}\cdot n = n\cdot n = n^2$$

8. Calcular la suma de todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 1000

Solución.

Se debe calcular cual el primer y el último múltiplo de siete de tres cifras

$$1^{\text{o}}:\ \frac{100}{7} = 14{,}28\ldots \Rightarrow a_1 = 15\cdot 7 = 105$$

$$\text{Último: } \frac{1000}{7} = 142{,}85\ldots \Rightarrow a_n = 142\cdot 7 = 994$$

Para calcular el número de términos se aplica la definición de término general al último término, teniendo en cuenta que la diferencia es 7.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d\ :\ \ 994 = 105 + (n-1)\cdot 7$$

$$n = \frac{994-105}{7} + 1 = 128$$

Conocido el número de términos se puede calcular la suma de todos ellos.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n : \left\{ \begin{array}{c} n = 128 \\ a_1 = 105 \\ a_{128} = 994 \end{array} \right\} : S_{128} = \frac{105 + 994}{2} \cdot 128 = 70336$$

9. ¿Qué valor numérico debe tener x para que las expresiones

$$2(x - 1);\ x^2 + 1;\ 5x + 1$$

formen una progresión aritmética?

Solución.

Para que los términos de una sucesión estén en progresión aritmética la diferencia entre términos consecutivos debe ser constante.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots$$

$$\underbrace{x^2 + 1}_{a_2} - \underbrace{2(x - 1)}_{a_1} = \underbrace{5x + 1}_{a_3} - \underbrace{\left(x^2 + 1\right)}_{a_2}$$

$$x^2 - 2x + 3 = -x^2 + 5x$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado se obtienen dos posibles valores: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1/2 \\ x = 3 \end{array} \right.$

Para $x = \frac{1}{2}:\ 2\left(\frac{1}{2} - 1\right),\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1,\ 5\frac{1}{2} + 1 = -1, \frac{5}{4}, \frac{7}{2}, \ldots\ d = \frac{9}{4}$

Para $x = 3:\ 2(3 - 1),\ (3)^2 + 1,\ 5 \cdot 3 + 1 = 4, 10, 16, \ldots\ d = 6$

10. ¿Qué valor numérico debe tener a para que las expresiones

$$a^2 + 1;\ 4a + 1;\ 4a^2 + 4$$

sean tres términos consecutivos de una progresión aritmética?

Solución.

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = \ldots$$

$$\underbrace{4a + 1}_{a_{n+1}} - \underbrace{\left(a^2 + 1\right)}_{a_n} = \underbrace{4a^2 + 4}_{a_{n+2}} - \underbrace{(4a + 1)}_{a_{n+1}}$$

$$-a^2 + 4a = 4a^2 - 4a + 3$$

$$5a^2 - 8a + 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado se obtienen dos posibles valores: $\left\{ \begin{array}{l} a = 3/5 \\ a = 1 \end{array} \right.$

Para $a = \frac{3}{5}:\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1,\ 4\frac{3}{5} + 1,\ 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4 = \frac{34}{25}, \frac{17}{5}, \frac{136}{25}, \ldots\ d = \frac{51}{25}$

Para $a = 1:\ 1^2 + 1,\ 4 \cdot 1 + 1,\ 4 \cdot 1^2 + 4 = 2, 5, 8, \ldots\ d = 3$

11. En una progresión aritmética de 10 términos, el 2º y el 9º, suman 25, si el 4º términos es 13, ¿cuál es el séptimo término?

Solución.

En una progresión aritmética, la suma de términos equidistantes es constante.

En la progresión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$$

Se cumple

$$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$$

$$a_2 + a_9 = a_4 + a_7\ ;\ \ 25 = 13 + a_7\ ;\ \ a_7 = 12$$

12. ¿Forman progresión aritmética las expresiones

$x^2 - 3x + 1;\ x^2 + 3x + 1;\ x^2 + 6x + 1$?

Solución.

Para que los términos de una sucesión estén en progresión aritmética la diferencia entre términos consecutivos debe ser constante.

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = \dots$$

$$\underbrace{x^2 + 3x + 1}_{a_{n+1}} - \underbrace{\left(x^2 - 3x + 1\right)}_{a_n} = \underbrace{x^2 + 6x + 1}_{a_{n+2}} - \underbrace{\left(x^2 + 3x + 1\right)}_{a_{n+1}}$$

$$6x \neq 3x \ \forall\ x \neq 0$$

No forman progresión aritmética para ningún valor real excepto para x = 0, que formarían una sucesión constante de diferencia cero.

13. En una progresión aritmética $a_{10}= 70$ y $a_{20}= 270$, ¿cuál es el término que es igual a 350?

Solución.

Conocidos dos términos de la progresión aritmética, se puede obtener el término general, y conocido el término general, se puede calcular la posición de cualquier término de la progresión.

$$\left.\begin{array}{r} a_{10} = a_1 + 9d = 70 \\ a_{20} = a_1 + 19d = 270 \end{array}\right\} : a_{20} - a_{10} = 10d = 200 : d = \frac{200}{10} = 20 : a_1 = 70 - 9 \cdot 20 = -110$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -110 + (n-1) \cdot 20 = 20n - 130$$

Si $a_n = 350 = 20n - 130 : n = \dfrac{350 + 130}{20} = 24$

14. En la progresión aritmética 48, 40, 32, 24,.. ¿Cuántos términos hay que tomar para que la suma sea 168?

Solución.

Se aplica la expresión de la suma de n términos de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

El término a_n se expresa en función de n mediante el término general.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

La diferencia se obtiene restando dos términos consecutivos cualesquiera.

$$d = a_2 - a_1 = 40 - 48 = -8$$

$$a_n = 48 + (n-1) \cdot (-8) = 56 - 8n$$

Sustituyendo en la suma de n términos se despeja n.

$$168 = \frac{48 + 56 - 8n}{2} \cdot n \ : \ 336 = (104 - 8n) \cdot n \ : \ 8n^2 - 104n + 336 = 0 \ : \ n^2 - 13n + 42 = 0$$

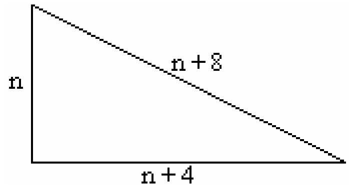
Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen las posibles soluciones

$$n^2 - 13n + 42 = 0 : \begin{cases} n = 6 \\ n = 7 \end{cases}$$

Las dos son válidas

15. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de diferencia 4. Hallar las medidas de los lados de dicho triángulo.

Solución.



Si los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de diferencia 4, el cateto menor será n, el cateto mayor n +4 y la hipotenusa n + 8. Entre ellos se cumplirá el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = c^2 + c^2$$
$$(n+8)^2 = n^2 + (n+4)^2$$
$$n^2 + 16n + 64 = n^2 + n^2 + 8n + 16$$
$$n^2 - 8n - 48 = 0 : \begin{cases} n = -4 \\ n = 12 \end{cases}$$

n = –4 no es válida, no existen longitudes negativas. Las longitudes de los lados del triángulo serán 12, 16 y 20.

16. Hallar los ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que sus medidas forman una progresión aritmética y que el menor mide 60º.

Solución.

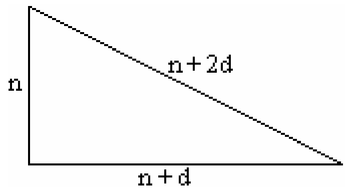
Los ángulos de un cuadrilátero suman 360º, si están en progresión aritmética y el 1º vale 60º, lo demás serán 60º + d, 60º + 2d y 60º + 3d.

$$360^\circ = 60^\circ + 60^\circ + d + 60^\circ + 2d + 60^\circ + 3d^\circ \ : \ 360^\circ = 240^\circ + 6d \ : \ d = \frac{360^\circ - 240^\circ}{6} = 20^\circ$$

Los ángulos serán: 60º, 80º, 100º, 120º.

17. Un terreno de forma de triángulo rectángulo tiene 720 metros de perímetro. Calcular sus lados sabiendo que están en progresión aritmética.

Solución.



Se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, una ecuación con el perímetro y otra con el teorema de Pitágoras.

$$\begin{cases} n + n + d + n + 2d = 720 \\ n^2 + (n+d)^2 = (n+2d)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3n + 3d = 720 \\ n^2 + n^2 + 2nd + d^2 = n^2 + 4nd + 4d^2 \end{cases} : \begin{cases} n + d = 240 \\ n^2 - 2nd - 3d^2 = 0 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación se despeja y se sustituyen en la 2ª.

$$n = 240 - d \ : \ (240-d)^2 - 2\cdot(240-d)\cdot d - 3d^2 = 0$$
$$240^2 - 2\cdot 240\cdot d + d^2 - 2d\cdot 240 + 2d\cdot d - 3d^2 = 0 \ : \ 57600 - 480d + d^2 - 480d + 2d^2 - 3d^2 = 0$$
$$57600 - 960d = 0 \ : \ d = \frac{57600}{960} = 60$$
$$n = 240 - 60 = 180$$

Los lados del triángulo son: 180, 240, 300

18. Determinar el primer término y el número de términos de una progresión aritmética en que $a_n = 18$; $d = 2$ y $S_n = 88$

Solución.

Se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Una ecuación se obtienen al aplica la expresión de la suma de n términos de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n : \ 88 = \frac{a_1 + 18}{2}\cdot n \ : \ (a_1 + 18)\cdot n = 176$$

La segunda ecuación se obtiene al aplicar el término general al término enésimo.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \ : \ 18 = a_1 + (n-1)\cdot 2 \ : \ a_1 + 2n = 20$$

El sistema queda: $\begin{cases}(a_1+18)\cdot n=176\\ a_1+2n=20\end{cases}: a_1=20-2n\ :\ (20-2n+18)\cdot n=176$

$$2n^2-38n+176=0\ :\ n^2-19n+88=0:\begin{cases}n=8: a_1=20-2\cdot 8=4\\ n=11: a_1=20-2\cdot 11=-2\end{cases}$$

Dos posibilidades: (a_1 = 4; n = 8) ó (a_1 = –2; n = 11).

19. ¿Cuántas campanadas da un reloj en 24 horas, si no suena más que a las horas en punto?

Solución.

El doble de la suma de 12 términos en progresión aritmética de diferencia 1 y a_1 = 1.

$$\left.\begin{matrix}a_1=1\\ d=1\end{matrix}\right\}: a_n=1+(n-1)\cdot 1\ :\ a_n=n$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\ :\ S_{12}=\frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12=\left\{\begin{matrix}a_1=1\\ a_{12}=12\end{matrix}\right\}=\frac{1+12}{2}\cdot 12=78$$

$$\text{Nº de campanadas en 24 horas}=2\cdot S_{12}=2\cdot 78=156$$

20. Hallar los ángulos de un triángulo rectángulo, sabiendo que están en progresión aritmética.

Solución.

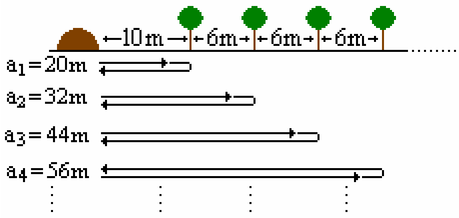
La suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados, si es rectángulo, el mayor de ellos será de 90º, con estos datos se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas α_1 y d.

$$\begin{cases}S_3=\dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\cdot 3=180^\circ\\ \alpha_3=\alpha_1+2d=90^\circ\end{cases}:\begin{cases}\alpha_1+90=\dfrac{180^\circ\cdot 2}{3}\\ \alpha_1+2d=90^\circ\end{cases}:\begin{cases}\alpha_1=30^\circ\\ d=30^\circ\end{cases}\Rightarrow \alpha_2=30^\circ+30^\circ=60^\circ$$

21. Un peón debe llevar una carretilla de arena al pie de cada uno de los 30 árboles de una calzada. Sabiendo que los árboles se encuentran a una distancia de 6m y que del montón de arena al primero hay 10m, ¿Qué camino habrá recorrido hasta depositar la carretilla en el montón tras el último viaje?

Solución.

Se pide calcular la suma de le los 30 primeros términos de una progresión aritmética, conociendo que a_1 = 20, y d = 12, tal como puede observarse en el esquema.



Término general: $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=20+(n-1)\cdot 12=12n+8$

Suma de n términos: $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

Para n = 30: $S_{30}=\dfrac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30=\left\{\begin{matrix}a_1=20\\ a_{30}=12\cdot 30+8=368\end{matrix}\right\}=\dfrac{20+368}{2}\cdot 30=5820\text{ m}$

22. La suma de los 4 términos centrales de una progresión aritmética es 74. Sabiendo que los términos son 12 y que el producto de los extremos es 70, hallar la progresión.

Solución.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$$

Datos: $a_5+a_6+a_7+a_8=74$

$a_1\cdot a_{12}=70$

Aplicando la definición de término general a los datos se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a_1, d).

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

$$\begin{cases}a_1+4d+a_1+5d+a_1+6d+a_1+7d=74\\ a_1\cdot(a_1+11d)=70\end{cases}:\begin{cases}4a_1+22d=74\\ a_1\cdot(a_1+11d)=70\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 11d = 37 \\ a_1 \cdot (a_1 + 11d) = 70 \end{cases} \ : \quad 11d = 37 - 2a_1 \ : \ a_1 \cdot (a_1 + 37 - 2a_1) = 70 \ : \ a_1 \cdot (37 - a_1) = 70$$

$$a_1^2 - 37a_1 + 70 = 0 : \begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow d = \dfrac{37 - 2 \cdot 2}{11} = 3 \\ a_1 = 35 \Rightarrow d = \dfrac{37 - 2 \cdot 35}{11} = -3 \end{cases}$$

Dos posibles progresiones:

- $a_1 = 2$; $d = 3$: $a_n = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35\}$
- $a_1 = 35$; $d = -3$: $a_n = \{35, 32, 29, 26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2\}$

23. La suma de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 36 y su producto 1680. Calcular los 3 términos.

Solución.

Datos: $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 36$

$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 1680$

Teniendo en cuenta que cada término se diferencia del anterior en la diferencia, se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a_n, d).

$$\begin{cases} a_n + a_n + d + a_n + 2d = 36 \\ a_n \cdot (a_n + d) \cdot (a_n + 2d) = 1680 \end{cases} : \begin{cases} 3a_n + 3d = 36 \\ a_n \cdot (a_n + d) \cdot (a_n + 2d) = 1680 \end{cases} : \begin{cases} a_n + d = 12 \\ a_n \cdot (a_n + d) \cdot (a_n + 2d) = 1680 \end{cases}$$

$$d = 12 - a_n \ : \ a_n \cdot (a_n + 12 - a_n) \cdot (a_n + 2 \cdot (12 - a_n)) = 1680 \ : \ 12a_n \cdot (24 - a_n) = 1680$$

$$12a_n^2 - 288a_n + 1680 = 0 \ : \ a_n^2 - 24a_n + 140 = 0 : \begin{cases} a_n = 10 \Rightarrow d = 12 - 10 = 2 \\ a_n = 14 \Rightarrow d = 12 - 14 = -2 \end{cases}$$

Dos posibilidades:

- 10, 12, 14.
- 14, 12, 10.

24. Hallar los 4 términos de una progresión aritmética, sabiendo que la diferencia es 4 y el producto de los términos 585.

Solución.

Si la diferencia es 4, los términos se pueden expresar en función de a_1.

$$a_1 \cdot (a_1 + 4) \cdot (a_1 + 8) \cdot (a_1 + 12) = 585$$

Desarrollando se llega a un polinomio de cuarto grado que se resuelve por <el método de Ruffini.

$$a_1^4 + 24a_1^3 + 176a_1^2 + 384a_1 - 585 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 24 & 176 & 384 & -585 \\ 1 & & 1 & 25 & 201 & 585 \\ \hline & 1 & 25 & 201 & 585 & \boxed{0} \\ -13 & & -13 & -156 & -585 & \\ \hline & 1 & 12 & 45 & \boxed{0} & \end{array}$$

Dos posibilidades:

- $a_1 = 1$; $a_2 = 5$; $a_3 = 9$; $a_4 = 13$.
- $a_1 = -13$; $a_2 = -9$; $a_3 = -5$; $a_4 = -1$.

25. Calcular la suma de los 18 múltiplos de 7 que siguen a 23.

Solución.

Se pide calcular la suma de 18 términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 28 y la diferencia es 7.

Término general: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 28 + (n-1)\cdot 7 = 7n + 21$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

Para n = 18: $S_{18} = \dfrac{a_1 + a_{18}}{2}\cdot 18 = \left\{\begin{matrix} a_1 = 28 \\ a_{18} = 7\cdot 18 + 21 = 147 \end{matrix}\right\} = \dfrac{28+147}{2}\cdot 18 = 1575$

26. En una progresión aritmética los términos 3º y 5º suman 64, y el 2º y el 7º suman 70. Calcular la diferencia y cada uno de estos términos.

Solución.

Datos: $a_3 + a_5 = 64$

$a_2 + a_7 = 70$

Mediante la expresión del término general $(a_n = a_1 + (n-1)\cdot d)$, se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a_1, d).

$$\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 4d = 64 \\ a_1 + d + a_1 + 6d = 70 \end{cases} : \begin{cases} 2a_1 + 6d = 64 \\ 2a_1 + 7d = 70 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se obtiene la diferencia d = 6, y sustituyendo en cualquiera de la ecuaciones se obtiene el primer término.

$$2a_1 + 6\cdot 6 = 64 \ : \ a_1 = 14$$

Conocidos a_1 y la diferencia, se calculan los términos que se piden:

$a_2 = 14 + 6 = 20$; $a_3 = 14 + 2\cdot 6 = 26$; $a_5 = 14 + 4\cdot 6 = 38$; $a_7 = 14 + 6\cdot 6 = 50$

27. La suma de los 6 primeros términos de una progresión aritmética es 102; la suma de los 9 primeros es 207. Hallar la progresión.

Solución.

Datos: $S_6 = 102 = \dfrac{a_1 + a_6}{2}\cdot 6 \ : \ a_1 + a_6 = 34$

$S_9 = 207 = \dfrac{a_1 + a_9}{2}\cdot 9 \ : \ a_1 + a_9 = 46$

Con la definición de término general $(a_n = a_1 + (n-1)\cdot d)$ se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a_1, d).

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 5d = 34 \\ a_1 + a_1 + 8d = 46 \end{cases} : \begin{cases} 2a_1 + 5d = 34 \\ 2a_1 + 8d = 46 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $\begin{cases} a_1 = 7 \\ d = 4 \end{cases}$

El término general de la progresión es: $a_n = 7 + (n-1)\cdot 4 \ \mathbf{:} \ a_n = 4n + 3$

28. La suma de los dos primeros términos de una progresión aritmética es 4 y la de los tres primeros es 3. Calcular el cuarto término de dicha progresión.

Solución.

Datos: $a_1 + a_2 = 4$

$a_1 + a_2 + a_3 = 3$

Con la definición de término general $\left(a_n = a_1 + (n-1)\cdot d\right)$ se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a_1, d).

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d = 4 \\ a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3 \end{cases} : \begin{cases} 2a_1 + d = 4 \\ 3a_1 + 3d = 3 \end{cases} : \begin{cases} 2a_1 + d = 4 \\ a_1 + d = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = -2 \end{cases}$

El término general será: $a_n = 3 + (n-1)\cdot(-2) = 5 - 2n$

Aplicando para n = 4: $a_4 = 5 - 2\cdot 4 = -3$

29. Hallar una progresión aritmética de seis términos, sabiendo que la suma de los extremos es 22 y que el producto de los dos términos centrales es 112.

Solución.

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6

Datos: $a_1 + a_6 = 22$

$a_3 \cdot a_4 = 112$

Teniendo en cuenta la propiedad de que la suma de términos equidistantes es constante,

$$a_1 + a_6 = a_3 + a_4 = 22$$

se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a_3. a_4).

$$\begin{cases} a_3 + a_4 = 22 \\ a_3 \cdot a_4 = 112 \end{cases} : a_4 = 22 - a_3 : a_3 \cdot (22 - a_3) = 112 : a_3^2 - 22a_3 + 112 = 0$$

Al resolver la ecuación se obtienen dos posibles soluciones: $\begin{cases} a_3 = 8 : a_4 = 14 \\ a_3 = 14 : a_4 = 8 \end{cases}$

- Si $a_3 = 8$ y $a_4 = 14$, $d = a_4 - a_3 = 14 - 8 = 6$.
  Conocida la diferencia se calcula lo demás términos.

  $$a_2 = a_3 - d = 8 - 6 = 2\ ;\ a_1 = a_2 - d = 2 - 6 = -4$$
  $$a_5 = a_4 + d = 14 + 6 = 20\ ;\ a_6 = a_5 + d = 20 + 6 = 26$$

  La sucesión es: –4; 2; 8; 14; 20; 26.

- Si $a_3 = 14$ y $a_4 = 8$, $d = a_4 - a_3 = 8 - 14 = -6$.
  Conocida la diferencia se calcula lo demás términos.

  $$a_2 = a_3 - d = 14 - (-6) = 20\ ;\ a_1 = a_2 - d = 20 - (-6) = 26$$
  $$a_5 = a_4 + d = 8 + (-6) = 2\ ;\ a_6 = a_5 + d = 2 + (-6) = -2$$

  La sucesión es: 26; 20; 14; 8; 2; –4.

30. La suma de n números naturales consecutivos tomados a partir de 11 es 1715. Calcular n.

Solución.

Progresión aritmética de la que se conoce $a_1 = 11$ y la diferencia ($d = 1$). El término general es:

$$a_n = 11 + (n-1) \cdot 1 = n + 10$$

Aplicando a la suma de n términos ($S_n = 1715$): $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$$1715 = \frac{11 + n + 10}{2} \cdot n \;:\; 3430 = (n+21) \cdot n \;:\; n^2 + 21n - 3430 = 0 : \begin{cases} n = 49 \\ n = -70 \end{cases}$$

Solo es válida la positiva n = 49.

31 Repartir 7800 € entre dieciséis personas, ordenadas éstas de menor a mayor por sus edades de modo que cada una tenga una cantidad superior a la anterior en 1/12 de la correspondiente a la primera. ¿Qué cantidad recibirá la persona de menor edad? ¿Y Qué cantidad recibirá la persona de mayor edad?

Solución.

Si se denomina por a_1 la cantidad que le corresponde al menor, la diferencia será $a_1/12$.

El término general es: $a_n = a_1 + (n-1)\frac{a_1}{12}$

La suma de los 16 términos es la cantidad a repartir.

$$S_{16} = 7800 = \frac{a_1 + a_{16}}{2} \cdot 16 \;:\; a_{16} = a_1 + 15\frac{a_1}{12} = \frac{9}{4}a_1 \;:\; 7800 = \left(a_1 + \frac{9}{4}a_1\right) \cdot 8$$

$$7800 = 26a_1 \;:\; a_1 = 300$$

$$a_{16} = 300 + 15 \cdot \frac{300}{12} = 675$$

La menor recibirá 300 € y la mayor 675 €.

PROGRESIONES GEOMETRICAS

1. De las siguientes progresiones, ¿cuáles son progresiones geométricas?

a. $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \dots$

b. 12, 20, 50, ...

c. 27, 45, 75, 125, ...

d. 24, 20, 14, 10, ...

e. by, b^2y^2, b^3y^3, ...

f. (a+b), 2(a+b), 3(a+b), ...

Solución.

Los términos de una sucesión están en progresión geométrica si el cociente entre términos consecutivos es constante $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{cte}\right)$.

a. $\frac{4/3}{2} = \frac{8/3}{4/9} = \frac{16/27}{8/9} = \frac{2}{3} = \text{cte}$ Progresión geométrica de razón $r = \frac{2}{3}$.

b. $\frac{20}{12} \neq \frac{50}{20}$ No están en progresión geométrica.

c. $\frac{45}{27} = \frac{75}{45} = \frac{125}{75} = \frac{5}{3} = \text{cte}$ Progresión geométrica de razón $r = \frac{5}{3}$.

d. $\frac{20}{24} \neq \frac{14}{20}$ No están en progresión geométrica.

e. $\frac{b^2y^2}{by} = \frac{b^3y^3}{b^2y^2} = by = \text{cte}$ Progresión geométrica de razón $r = by$.

f. $\frac{2(a+b)}{a+b} \neq \frac{3(a+b)}{2(a+b)}$ No están en progresión geométrica.

2. Calcula el valor de a y la razón de la progresión geométrica en la que:

$$a + 3,\ 2a,\ 3a - 2$$

son términos consecutivos.

Solución.

Los términos de una sucesión están en progresión geométrica si el cociente entre términos consecutivos es constante.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

$$\frac{2a}{a+3} = \frac{3a-2}{2a}$$

Multiplicando en cruz y ordenando:

$$(2a)^2 = (3a-2)\cdot(a+3) : \ 4a^2 = 3a^2 + 7a - 6 : \ a^2 - 7a + 6 = 0 : \begin{cases} a = 6 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si a = 6: 9; 12; 16 … $r = \frac{4}{3}$
- Si a = 1: 4; 2; 1 … $r = \frac{1}{2}$

3. Escribe los 4 primeros términos de una progresión geométrica de la que se sabe que $a_1 = \sqrt{2}$ y $r = -\sqrt{2}$

Solución.

El término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_n = \sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{2}} = (-1)^{n-1}\sqrt{2}^n$$

- $n = 1$: $a_1 = (-1)^{1-1}\sqrt{2}^1 = \sqrt{2}$
- $n = 2$: $a_1 = (-1)^{2-1}\sqrt{2}^2 = -2$
- $n = 3$: $a_1 = (-1)^{3-1}\sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$
- $n = 4$: $a_1 = (-1)^{4-1}\sqrt{2}^4 = -4$

4. Calcula el término décimo de la progresión 1/1000, 1/100, 1/10, ...

Solución.

Se calcula el término general, y con él, el término que se pide.

El término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{1}{1000} \\ r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1/100}{1/1000} = 10 \end{array}\right\} : a_n = \frac{1}{1000} \cdot 10^{n-1} = 10^{n-4}$$

Para n = 10: $a_{10} = 10^{10-4} = 10^6$

5. Determina los siete primeros términos de una progresión geométrica si los dos primeros valen 3 y 4 respectivamente.

Solución.

Conocidos los dos primeros términos de una progresión geométrica, se calcula la razón, con la razón y el primer término, el término general.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} : a_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

- $n = 1$: $a_1 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{1-1} = 3 \cdot 1 = 3$
- $n = 2$: $a_2 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2-1} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$
- $n = 3$: $a_3 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3-1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$
- $n = 4$: $a_4 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{4-1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{9}$
- $n =5$: $a_5 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{5-1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{27}$
- $n = 6$: $a_6 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{6-1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{81}$

6. El término séptimo de una geométrica vale 243, y la razón 3. Hallar el primer término.

Solución.

Aplicando la definición de término general para n = 7 y teniendo en cuenta que $a_7 = 243$ y $r = 3$, se puede despejar a_1.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Para n = 7: $a_7 = a_1 \cdot r^{7-1}$: $243 = a_1 \cdot 3^6$: $a_1 = \frac{243}{3^6} = \frac{3^5}{3^6} = \frac{1}{3}$

7. Dos términos consecutivo de una progresión geométrica valen 6 y 8. Calcular el lugar que ocupan si el primer término de la progresión es $^{81}\!/_{32}$

Solución.

Conocidos los dos primeros términos de una progresión geométrica, se calcula la razón, con la razón y el primer término, el término general.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{81}{32} \\ r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{array}\right\} : a_n = \frac{81}{32} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Se pide calcular n sabiendo que $a_n = 6$ ó $a_{n+1} = 8$

$$a_n = 6 = \frac{81}{32} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} : \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{32 \cdot 6}{81} : \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{64}{27} = \frac{4^3}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow n - 1 = 3 : n = 4$$

$$a_4 = 6 \ ; \ a_5 = 8$$

8. Interpolar cinco términos entre 7 y 5103 de modo que formen una progresión geométrica.

Solución.

Se conoce el primer término, el último, y la posición que ocupa este, solo necesitamos calcular la razón, se aplica la definición de término general al último y se despeja la razón.

$$a_1 = 7, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6}_{\text{5 términos}}, a_7 = 5103$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Para n = 7: $a_7 = a_1 \cdot r^{7-1}$: $5103 = 7 \cdot r^6$: $r^6 = \frac{5103}{7} = 729$: $r = \sqrt[6]{729} = 3$

$$a_1 = 7 \ ; \ a_2 = a_1 \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21 \ ; \ a_3 = a_2 \cdot 3 = 21 \cdot 3 = 63 \ ; \ a_4 = a_3 \cdot 3 = 63 \cdot 3 = 189$$

$$a_5 = a_4 \cdot 3 = 189 \cdot 3 = 567 \ ; \ a_6 = a_5 \cdot 3 = 567 \cdot 3 = 1701 \ ; \ a_7 = a_6 \cdot 3 = 1701 \cdot 3 = 5103$$

La progresión geométrica es:

7; 21; 63; 189; 567; 1701; 5103

9. Interpolar cuatro términos entre 4 y 1/8 de modo que formen una progresión geométrica.

Solución.

Se conoce el primer término, el último, y la posición que ocupa este, solo necesitamos calcular la razón, se aplica la definición de término general al último y se despeja la razón.

$$a_1 = 4, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5}_{\text{5 términos}}, a_6 = \frac{1}{8}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Para n = 6: $a_6 = a_1 \cdot r^{6-1}$: $\frac{1}{8} = 4 \cdot r^5$: $r^5 = \frac{1}{32}$: $r = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

$$a_1 = 4 \ ; \ a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \ ; \ a_3 = a_2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \ ; \ a_4 = a_3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = a_4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ ; \ a_6 = a_5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

La progresión geométrica es:

$$4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8}$$

10. Hallar tres números en progresión geométrica de modo que su suma es 26 y su producto 216

Solución.

Sean a_1, a_2, a_3, los tres términos en progresión geométrica:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 26 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 216 \end{cases}$$

Mediante el término general, se expresan los tres términos en función de a_1 y r.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r \\ a_3 = a_1 \cdot r^2 \end{cases} \text{ Sustituyendo en el sistema: } \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = 26 \\ a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 = 216 \end{cases} ; \begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 26 \\ a_1^3 r^3 = 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 26 \\ \left(a_1 \cdot r\right)^3 = 216 \end{cases} ; \begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 26 \\ a_1 \cdot r = \sqrt[3]{216} \end{cases} ; \begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 26 \\ a_1 \cdot r = 6 \end{cases}$$

EL sistema se resuelve por sustitución:

$$a_1 = \frac{6}{r} \ ; \ \frac{6}{r}\left(1 + r + r^2\right) = 26 \ ; \ 6 + 6r + 6r^2 = 26r \ ; \ 6r^2 - 20r + 6 = 0$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0 : \begin{cases} x = 3 \Rightarrow a_1 = 2;\ a_2 = 2 \cdot 3 = 6;\ a_3 = 6 \cdot 3 = 18 \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = 18;\ a_2 = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6;\ a_3 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Dos posibles soluciones: } \begin{cases} r = 3 :\ 2,\ 6,\ 18 \\ r = \frac{1}{3} :\ 18,\ 6,\ 2 \end{cases}$$

11. Calcula el producto de los 11 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el término central vale 2

Solución.

Los términos de las progresiones geométricas limitadas cumplen que el producto de términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de los extremos. Si la progresión es de un número impar de términos, el cuadrado del término central también coincide con el producto de los extremos.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}$$

$$a_1 \cdot a_{11} = a_2 \cdot a_{10} = \ldots\ldots = a_6^2 = \text{cte}$$

Aplicando esta propiedad se llega a la expresión del producto de n términos de una progresión geométrica:

$$P_n = \sqrt{\left(a_1 \cdot a_n\right)^n}$$

$$\text{Para } n = 11\text{: } P_{11} = \sqrt{\left(a_1 \cdot a_{11}\right)^{11}} = \left\{a_1 \cdot a_{11} = a_6^2 = 2^2 = 4\right\} = \sqrt{4^{11}} = 2^{11} = 2048$$

12. Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto vale 10^6. Calcula dichos números.

Solución.

Sean a_1, a_2, a_3, los tres términos en progresión geométrica:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 525 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 10^6 \end{cases}$$

Mediante el término general, se expresan los tres términos en función de a_1 y r.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r \\ a_3 = a_1 \cdot r^2 \end{cases} \text{ Sustituyendo en el sistema: } \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = 525 \\ a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 = 10^6 \end{cases} ; \begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 525 \\ a_1^3 r^3 = 10^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 525 \\ \left(a_1 \cdot r\right)^3 = 10^6 \end{cases} ; \begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 525 \\ a_1 \cdot r = \sqrt[3]{10^6} \end{cases} ; \begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 525 \\ a_1 \cdot r = 10^2 \end{cases}$$

EL sistema se resuelve por sustitución:

$$a_1 = \frac{10^2}{r} \; ; \; \frac{10^2}{r}\left(1 + r + r^2\right) = 525 \; ; \; 100 + 100r + 100r^2 = 525r \; ; \; 100r^2 - 425r + 100 = 0$$

$$4r^2 - 17r + 4 = 0 :: \begin{cases} x = 4 \Rightarrow a_1 = 25;\ a_2 = 25 \cdot 4 = 100;\ a_3 = 100 \cdot 4 = 400 \\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = 400;\ a_2 = 400 \cdot \frac{1}{4} = 100;\ a_3 = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25 \end{cases}$$

$$\text{Dos posibles soluciones: } \begin{cases} r = 4 :\ 25,\ 100,\ 400 \\ r = \frac{1}{4} :\ 400,\ 100,\ 25 \end{cases}$$

13. Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen $1/2$ y los dos últimos $1/8$.

Solución.

Sean a_1, a_2, a_3, a_4, cuatro términos en progresión geométrica:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{1}{2} \\ a_3 + a_4 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Mediante el término general, se expresan los cuatro términos en función de a_1 y r.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r \\ a_3 = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 = a_1 \cdot r^3 \end{cases} \text{ Sustituyendo en el sistema: } \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot r = \frac{1}{2} \\ a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 = \frac{1}{8} \end{cases} : \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot r = \frac{1}{2} \\ \left(a_1 + a_1 \cdot r\right) \cdot r^2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda:

$$\frac{1}{2} \cdot r^2 = \frac{1}{8} \; : \; r^2 = \frac{1}{4} \; : \; r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor de r en la primera ecuación:

$$a_1 + a_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \; : \; a_1 \cdot \left(1 + \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \; : \; \frac{3}{2} a_1 = \frac{1}{2} \; : \; a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \; : \; a_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \; : \; a_4 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

Los términos de la progresión son: $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$

14. Dada la progresión geométrica $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$ ¿Cuánto vale la razón? Calcula la suma de los infinitos términos de la progresión.

Solución.

La razón en una progresión geométrica se obtiene dividiendo dos términos consecutivos.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

En las progresiones geométricas con razón comprendida entre 0 y 1 ($0 < r < 1$) se puede calcular la suma de los infinitos términos.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$$

15. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?

Solución.

$$\text{Datos: } \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_n = 448 \\ S_n = 889 \end{cases}$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos de una progresión geométrica, se puede calcular la razón. Conocida la razón, se aplica la definición de término general al término enésimo para calcular la posición de este (n).

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \ : \ 889 = \frac{448 \cdot r - 7}{r-1} \ : \ 889 \cdot (r-1) = 448r - 7 \ : \ 441r = 882 \ : \ r = 2$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \ : \ 448 = 7 \cdot 2^{n-1} \ : \ 2^{n-1} = \frac{448}{7} = 64 = 2^6 \Leftrightarrow n-1 = 6 \ : \ n = 7$$

16. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla el primero y el séptimo término.

Solución.

Sustituyendo la expresión del término enésimo en la expresión de la suma de n términos de una progresión geométrica, se obtiene está en función de a_1 y r.

$$\left.\begin{array}{l} S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \\ a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \end{array}\right\} : S_n = \frac{a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \ : \ S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r-1} \ : \ 7651 = \frac{a_1 \cdot (3^7 - 1)}{3-1} \ : \ a_1 = \frac{7651 \cdot 2}{3^7 - 1} = 7$$

$$a_7 = 7 \cdot 3^{7-1} = 5103$$

17. Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328 509, sabiendo que el mayor excede en 115 a la suma de los otros dos.

Solución.

En una progresión de tres términos (a_1, a_2, a_3), se cumple:

$$a_1 \cdot a_3 = (a_2)^2$$

Si se aplica esta propiedad al producto de tres términos, se puede despejar el término central (a_2) en función del producto.

$$P_3 = \sqrt{(a_1 \cdot a_3)^3} = \sqrt{\left((a_2)^2\right)^3} \Leftrightarrow a_2 = \sqrt[3]{P_3} = \sqrt[3]{328509} = 69$$

Con el dato del producto de los tres términos y la relación entre ellos, se puede plantear un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} P_3=\sqrt{(a_1\cdot a_3)^3} \\ a_3=a_1+a_2+115 \\ a_2=69 \end{cases} : \begin{cases} a_1\cdot a_3=\sqrt[3]{328509^2} \\ a_3=a_1+69+115 \end{cases} : \begin{cases} a_1\cdot a_3=4761 \\ a_3=a_1+184 \end{cases} : a_1\cdot(a_1+184)=4761$$

$$a_1^2+184a_1-4761=0 : \begin{cases} a_1=23 \Rightarrow a_3=23+184=207 \\ a_1=-207 \Rightarrow a_3=-207+184=-23 \end{cases}$$

Dos posibles soluciones:

- 23, 69, 207: r = 3
- –207, 69, –23: r = –3

18. Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.

Solución.

Datos: $\begin{cases} a_2=a_1+32 \\ a_3=a_2+96 \end{cases} : \begin{cases} a_2=a_1+32 \\ a_3=a_1+32+96 \end{cases} : \begin{cases} a_2=a_1+32 \\ a_3=a_1+128 \end{cases}$

Teniendo en cuenta la definición de término general $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$

$$\begin{cases} a_1\cdot r=a_1+32 \\ a_1\cdot r^2=a_1+128 \end{cases}$$

El sistema se resuelve por igualación, despejando en cada ecuación a_1.

$$\begin{cases} a_1\cdot r-a_1=32 \\ a_1\cdot r^2-a_1=128 \end{cases} : \begin{cases} a_1\cdot(r-1)=32 \\ a_1\cdot(r^2-1)=128 \end{cases} : \begin{cases} a_1=\dfrac{32}{r-1} \\ a_1=\dfrac{128}{r^2-1} \end{cases} : \frac{32}{r-1}=\frac{128}{r^2-1}$$

Multiplicando en cruz y ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado en r.

$$32r^2-128r+96=0 : r^2-4r+3=0 : \begin{cases} r=1: \text{No tiene sentido}: a_1=\dfrac{32}{1-1}=\dfrac{32}{0} \\ r=3: a_1=\dfrac{32}{3-1}=16 \end{cases}$$

$$\text{Si}: \begin{cases} a_1=16 \\ r=3 \end{cases} : a_2=16\cdot 3=48 : a_3=16\cdot 3^2=144$$

19. Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.

Solución.

Con los datos que se dan se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} a_2=20 \\ S_4=425 \end{cases} : \begin{cases} a_2=a_1\cdot r=20 \\ S_4=\dfrac{a_4\cdot r-a_1}{r-1}=425 \end{cases} : \begin{cases} a_1\cdot r=20 \\ \dfrac{a_1\cdot r^{4-1}\cdot r-a_1}{r-1}=425 \end{cases} : \begin{cases} a_1\cdot r=20 \\ \dfrac{a_1\cdot(r^4-1)}{r-1}=425 \end{cases}$$

Mediante la expresión notable diferencia de cuadrados, se puede simplificar la segunda ecuación

$$r^4-1=(r^2)^2-1^2=(r^2-1)(r^2+1)=(r-1)(r+1)(r^2+1)$$

$$\begin{cases} a_1\cdot r=20 \\ \dfrac{a_1\cdot(r-1)(r+1)(r^2+1)}{r-1}=425 \end{cases} : \begin{cases} a_1\cdot r=20 \\ a_1\cdot(r+1)(r^2+1)=425 \end{cases}$$

Despejando a_1 de la 1ª ecuación y sustituyendo en la 2ª, se llega a una ecuación cúbica que se resuelve por Ruffini.

$$a_1=\frac{20}{r}\ :\ \frac{20}{r}(r+1)\left(r^2+1\right)=425\ :\ 4(r+1)\left(r^2+1\right)=85r\ :\ 4r^3+4r^2-81r+4=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 4 & -81 & 4 \\ 4 & & 16 & 80 & -4 \\ \hline & 4 & 20 & -1 & \boxed{0} \end{array}\qquad r=4:\ a_1=\frac{20}{4}=5$$

Conocidos el primer término y la razón se calculan los restantes término de la progresión geométrica.

$$a_1=4\ ;\ a_2=a_1\cdot r=5\cdot 4=20\ ;\ a_3=a_2\cdot r=20\cdot 4=80\ ;\ a_4=a_3\cdot r=80\cdot 4=320$$

20. El volumen de paralelepípedo rectángulo es de 3375 cm^3. Halla la longitud de las aristas sabiendo que están en progresión geométrica y que su suma es 65 cm.

Solución.

Sean a_1, a_2 y a_3 las longitudes de las aristas, si están en progresión geométrica, se cumple:

$$a_2=a_1\cdot r\ :\ a_3=a_1\cdot r^2$$

$$\begin{cases}V=a_1\cdot a_2\cdot a_3=3375\\ a_1+a_2+a_3=65\end{cases}:\ \begin{cases}a_1\cdot a_1r\cdot a_1r^2=3375\\ a_1+a_1r+a_1r^2=65\end{cases}:\ \begin{cases}a_1^3\cdot r^3=3375\\ a_1\left(1+r+r^2\right)=65\end{cases}:\ \begin{cases}a_1\cdot r=\sqrt[3]{3375}\\ a_1\left(1+r+r^2\right)=65\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1\cdot r=15\\ a_1\left(1+r+r^2\right)=65\end{cases}$$

El sistema se resuelve por igualación, despejando de cada ecuación a_1.

$$\begin{cases}a_1=\dfrac{15}{r}\\ a_1=\dfrac{65}{1+r+r^2}\end{cases}:\ \frac{15}{r}=\frac{65}{1+r+r^2}$$

Multiplicando en cruz y ordenando, se obtiene una ecuación de segundo grado.

$$15r^2-50r+15=0\ :\ 3r^2-10r+3=0:\begin{cases}r=3\Rightarrow a_1=5:a_2=5\cdot 3=15:a_3=5\cdot 3^2=45\\ r=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a_1=45:a_2=45\cdot\dfrac{1}{3}=15:a_3=45\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=5\end{cases}$$

Las longitudes de las aristas son 5, 15 y 45.

21. Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.

Solución.

Sean α_1, α_2, α_3 y α_4 los ángulos de un cuadrilátero que están en progresión geométrica. Si el mayor es 27 veces el menor:

$$\begin{cases}\alpha_4=27\alpha_1\\ \alpha_4=\alpha_1\cdot r^3\end{cases}:\alpha_1\cdot r^3=27\alpha_1\Rightarrow r^3=27\ :\ r=\sqrt[3]{27}=3$$

Si se tiene en cuenta que los ángulos de un cuadrilátero suman 360º:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=360^{\circ}$$

Aplicando la definición de término general:

$$\alpha_1+\alpha_1\cdot r+\alpha_1\cdot r^2+\alpha_1\cdot r^3=360^{\circ}$$

$$\alpha_1\left(1+r+r^2+r^3\right)=360^{\circ}$$

Sustituyendo r por su valor se calcula α_1.

$$\alpha_1\left(1+3+3^2+3^3\right)=360^{\circ}\ :\ 40\alpha_1=360\ :\ \alpha_1=\frac{360}{40}=9$$

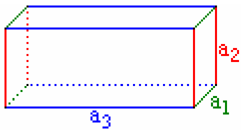
Conocido α_1 y la razón se calculan los demás ángulos.

$$\alpha_2 = 9 \cdot 3 = 27 \;:\; \alpha_3 = 9 \cdot 3^2 = 81 \;:\; \alpha_4 = 9 \cdot 3^3 = 243$$

Los ángulos del cuadrilátero son: 9º, 27º, 81º, 243º.

22. Las dimensiones de un ortoedro están en progresión geométrica. Calcula estas dimensiones sabiendo que su perímetro es de 420 m. y su volumen 8000 m^3.

Solución.



Las dimensiones del ortoedro de la figura son a_1, a_2 y a_3. El volumen es el producto de sus dimensiones.

$$V = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$$

Si están en progresión geométrica: $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_1 \cdot r^2$

$$8000 = a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 \;:\; a_1{}^3 r^3 = 8000 \;:\; a_1 r = \sqrt[3]{8000} \;:\; a_1 r = 20$$

El perímetro el ortoedro es la suma de todas sus aristas.

$$P = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 \;:\; P = 4 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) \;:\; 4 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = 420 \;:\; a_1 + a_2 + a_3 = 105$$

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 105 \;:\; a_1 \left(1 + r + r^2\right) = 105$$

23. Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.

Solución.

Los dos datos del enunciado permiten plantear un sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 221 \\ a_3 = a_1 + 136 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que son términos de una progresión aritmética, se deja el sistema en función de a_1 y r, resolviendo por igualación.

$$\left.\begin{matrix} a_2 = a_1 r \\ a_3 = a_1 r^2 \end{matrix}\right\} : \begin{cases} a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 221 \\ a_1 r^2 = a_1 + 136 \end{cases} : \begin{cases} a_1 \left(1 + r + r^2\right) = 221 \\ a_1 \left(r^2 - 1\right) = 136 \end{cases} : \begin{cases} a_1 = \dfrac{221}{1 + r + r^2} \\ a_1 = \dfrac{136}{r^2 - 1} \end{cases}$$

$$\frac{221}{1 + r + r^2} = \frac{136}{r^2 - 1}$$

Multiplicando en cruz y ordenando, se obtiene una ecuación de 2º grado en r.

$$85r^2 - 135r - 357 = 0 : \begin{cases} r = 3 \\ r = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

La única solución que genera términos enteros es r = 3.

Si r = 3, $a_1 = \dfrac{136}{r^2 - 1} = \dfrac{136}{3^2 - 1} = 17$, $a_2 = 17 \cdot 3 = 51$, $a_3 = 17 \cdot 3^2 = 153$

24. La suma de tres términos en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.

Solución.

Los dos datos del enunciado permiten plantear un sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 248 \\ a_3 - a_1 = 192 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que son términos de una progresión aritmética, se deja el sistema en función de a_1 y r, resolviendo por igualación.

$$\left.\begin{matrix} a_2 = a_1 r \\ a_3 = a_1 r^2 \end{matrix}\right\} : \begin{cases} a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 248 \\ a_1 r^2 - a_1 = 192 \end{cases} : \begin{cases} a_1\left(1 + r + r^2\right) = 248 \\ a_1\left(r^2 - 1\right) = 192 \end{cases} : \begin{cases} a_1 = \dfrac{248}{1 + r + r^2} \\ a_1 = \dfrac{192}{r^2 - 1} \end{cases}$$

$$\frac{248}{1 + r + r^2} = \frac{192}{r^2 - 1}$$

Multiplicando en cruz y ordenando, se obtiene una ecuación de 2º grado en r.

$$56r^2 - 192r - 440 = 0 : \begin{cases} r = 5 \\ r = -\dfrac{11}{7} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{192}{5^2 - 1} = 8 \ : \ a_2 = 8 \cdot 5 = 40 \ : \ a_3 = 8 \cdot 5^2 = 200$$

$$a_1 = \frac{192}{\left(-\frac{11}{7}\right)^2 - 1} = \frac{392}{3} \ : \ a_2 = \frac{392}{3} \cdot \frac{-11}{7} = \frac{-616}{3} \ : \ a_3 = \frac{392}{3} \cdot \left(\frac{-11}{7}\right)^2 = \frac{968}{3}$$

25. Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.

Solución.

Los datos del enunciado permiten plantear un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 28 \\ a_3 + a_4 = 175 \end{cases}$$

Temiendo en cuenta que son términos de una progresión geométrica, se aplica la definición de término general a cada uno de ellos, de está forma se deja el sistema en dos incógnitas (a_1, r).

$$\left.\begin{matrix} a_2 = a_1 r \\ a_3 = a_1 r^2 \\ a_4 = a_1 r^3 \end{matrix}\right\} : \begin{cases} a_1 + a_1 r = 28 \\ a_1 r^2 + a_1 r^3 = 175 \end{cases} : \begin{cases} a_1(1 + r) = 28 \\ a_1 r^2 (1 + r) = 175 \end{cases}$$

Dividiendo las ecuaciones se elimina a_1 y obtenemos una ecuación de 2º grado en función de r.

$$\frac{a_1(1 + r)}{a_1 r^2 (1 + r)} = \frac{28}{175} \ : \ \frac{1}{r^2} = \frac{4}{25} \ : \ r^2 = \frac{25}{4} \ : \ r = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$$

- Si $r = \frac{5}{2}$: $a_1 = \frac{28}{1 + r} = \frac{28}{1 + 5/2} = \frac{28}{7/2} = 8$: $a_2 = a_1 r = 8 \cdot \frac{5}{2} = 20$: $a_3 = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 50$:

  $a_4 = a_1 r^3 = 8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = 125$. $a_1 = 8$, $a_2 = 20$, $a_3 = 50$, $a_4 = 125$.

- Si $r = -\frac{5}{2}$: $a_1 = \frac{28}{1 + r} = \frac{28}{1 + -5/2} = \frac{28}{-3/2} = -\frac{56}{3}$: $a_2 = a_1 r = \frac{-56}{3} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{140}{3}$:

  $a_3 = a_1 r^2 = \frac{-56}{3} \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{-350}{3}$: $a_4 = a_1 r^3 = \frac{-5}{2} \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)^3 = \frac{875}{3}$.

  $a_1 = -\frac{56}{3}$, $a_2 = \frac{140}{3}$, $a_3 = -\frac{350}{3}$, $a_2 = \frac{875}{3}$.

26. Calcular mediante progresiones geométricas la fracción generatriz de 2, 0136363636...

Solución.

El número periódico se puede descomponer en la siguiente suma:

$$2{,}01 + 0{,}0036 + 0{,}000036 + 0{,}00000036 + \dots = 2{,}01 + 36\times10^{-4} + 36\times10^{-6} + 36\times10^{-8} + \dots =$$
$$= 2{,}01 + 36\cdot\left(10^{-4} + 10^{-6} + 10^{-8} + \dots\right)$$

Donde el paréntesis corresponde a la suma de los infinitos término de una progresión geométrica de razón menor que 1.

$$10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \dots \text{ P. Geométrica}: \begin{cases} a_1 = 10^{-4} \\ r = 10^{-2} \end{cases}$$

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{10^{-4}}{1-10^{-2}} = \frac{10^{-4}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{10^{-4}}{\frac{99}{100}} = \frac{10^{-2}}{99} = \frac{1}{9900}$$

Sustituyendo en el paréntesis y operando se llega a la fracción generatriz:

$$2{,}013636\ldots = 2{,}01 + 36\cdot\left(10^{-4} + 10^{-6} + 10^{-8} + \dots\right) = 2{,}01 + 36\cdot\frac{1}{9900} = \frac{201}{100} + \frac{36}{9900} = \frac{19935}{9900} = \frac{443}{220}$$

$$2{,}013636\ldots = \frac{443}{220}$$

27. Calcular 2'02 + 1'002 + 0'5002 + …

Solución.

Los términos de la suma se pueden descomponer de la siguiente forma:

$$2 + 0{,}02 + 1 + 0\,002 + 0{,}5 + 0{,}0002 + \dots = 2 + 1 + 0{,}5 + \dots + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}002 + \dots =$$
$$= (2 + 1 + 0{,}5 + \dots) + 2\cdot(0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \dots) = (2 + 1 + 0{,}5 + \dots) + 2\cdot\left(10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \dots\right)$$

Donde cada uno de los paréntesis corresponde a la suma de los infinitos término de una progresión geométrica de razón menor que 1.

$$2 + 1 + 0{,}5 + \dots \text{ P. Geométrica}: \begin{Bmatrix} a_1 = 2 \\ r = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} : S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{1/2} = 4$$

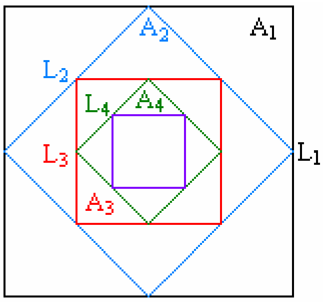
$$10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \dots \text{ P. Geométrica}: \begin{Bmatrix} a_1 = 10^{-2} \\ r = 10^{-1} \end{Bmatrix} : S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{10^{-2}}{1-10^{-1}} = \frac{10^{-2}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10^{-2}}{\frac{9}{10}} = \frac{10^{-1}}{9} = \frac{1}{90}$$

Sustituyendo en los paréntesis:

$$2{,}02 + 1{,}002 + 0{,}5002 + \dots = 4 + 2\cdot\frac{1}{90} = \frac{181}{45}$$

28. Calcular la suma de las áreas de todos los cuadrados inscritos en un cuadrado de lado a.

Solución.



Se pide calcular la suma de las áreas de los cuadrados de la figura. Para ello es necesario calcular las longitudes de los lados de los cuadrados. Si la longitud del lado del primer cuadrado es a, su área será:

$$A_1 = a^2$$

La longitud del lado del segundo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de longitud a/2:

$$L_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \;:\; A_2 = \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Para calcular L_3 se repite la operación teniendo en cuenta que ahora es la longitud de la hipotenusa de otro triángulo rectángulo de catetos $L_2/2$.

$$\frac{L_2}{2} = \frac{\sqrt{2}a/2}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{4} \;:\; L_3 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{16}} = \frac{a}{2} \;:\; A_3 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

Se repite para L_4 el mismo proceso.

$$\frac{L_3}{2} = \frac{a/2}{2} = \frac{a}{4} \; : \; L_4 = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16}} = \frac{a}{\sqrt{8}} \; : \; A_3 = \left(\frac{a}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{a^2}{8}$$

Y así sucesivamente.

Las áreas de los cuadrados $a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, \ldots$ siguen una progresión geométrica de $r = 1/2$ y $a_1 = a^2$. La suma de las infinitas áreas será:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{1/2} = 2a^2$$

29. Una persona comunica un secreto a cuatro vecinos; al cabo de un cuarto de hora cada uno de estos lo ha comunicado a otras cuatro personas. Suponiendo que cada cuarto de hora se ha repetido la operación de la misma manera e indefinidamente, ¿cuánto tiempo tardará en conocer el secreto una ciudad de 21.845 habitantes cotillas.

Solución.

La progresión del número de vecinos que se van enterando seria:

- Para $t = 0$ $a_1 = 4$
- Para $t = 15$ min. $a_2 = 16$
- Para $t = 30$ min. $a_3 = 64$

Los términos forman una progresión geométrica de razón $r = 4$ y primer término $a_1 = 4$.

$$a_n = 4 \cdot r^{n-1} \; : \; a_n = r^n$$

Se pide calcular el tiempo que tardarían enterarse los 21845 vecinos menos uno, que es el que conoce el secreto. Para calcular el tiempo habrá que calcular el número de términos que hay que sumar para alcanzar la cifra de 21845 – 1 = 21844.

$$\left.\begin{array}{l} S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \\ a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \end{array}\right\} : S_n = \frac{a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot \left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

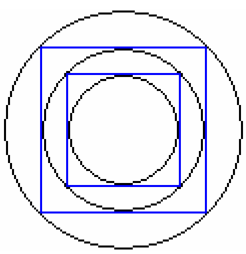
$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(r^n - 1\right)}{r-1} : \left\{\begin{array}{l} S_n = 21844 \\ a_1 = 4 \\ r = 4 \end{array}\right\} : 21844 = \frac{4 \cdot \left(4^n - 1\right)}{4-1} \; : \; 16383 = 4^n - 1$$

$$4^n = 16384 = 4^7 \Leftrightarrow n = 7$$

$n = 1$ $t = 0$ min.
$n = 2$ $t = 15$ min.
$n = 3$ $t = 30$ min.
……………………
$n = 7$ $t = 90$ min,

30. En un circulo de radio R se inscribe un cuadrado; en el cuadrado un circulo, y así sucesivamente. Hallar la suma de todas las áreas.

Solución.

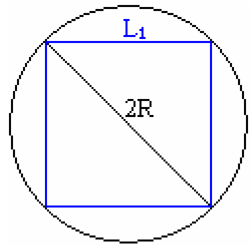


Se pide hallar la suma de las áreas de las infinitas circunferencias y cuadrados de la figura.

Si a las áreas de las circunferencias, que forman una progresión, las denominamos A_n y la de los cuadrados B_n, habrá que calcular los primero términos de ambas, y comprobar que forman progresiones geométricas, y de esta forma poder calcular la suma de los infinitos términos de la progresión conocidos el primer término y la razón.

Si la primera circunferencia tiene de radio $R_1 = R$ su área, y por tanto el primer término de la progresión A_n será:

$$A_1 = \pi R_1^2 = \pi R^2$$

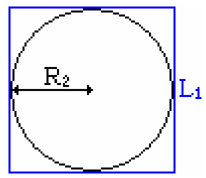


El diámetro de cada circunferencia coincide con la diagonal del cuadrado inscrito en ella, por lo tanto, la longitud del lado de primer cuadrado (L_1), inscrito en la circunferencia de radio R, se puede obtener por Pitágoras.

$$L_1^2 + L_1^2 = (2R)^2 \ : \ 2L_1^2 = 4R^2 \ : \ L_1^2 = 2R^2 \ : \ L_1 = \sqrt{2}R$$

Conocida la longitud del lado del cuadrado, se calcula su área que será el primer término de la progresión B_n.

$$B_1 = L_1^2 = \left(\sqrt{2}R\right)^2 = 2R^2$$



El radio de la circunferencia inscrita en un cuadrado es la mitad de la longitud del lado de cuadrado.

$$R_2 = \frac{L_1}{2} = \frac{\sqrt{2}R}{2}$$

Conocido R_2, se calcula A_2.

$$A_2 = \pi R_2^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$$

Conocido R_2, se calcula L_2 con el mismo razonamiento que se hizo para calcular L_1. $2R_2$ es la diagonal del cuadrado de lado L_2.

$$L_2^2 + L_2^2 = (2R_2)^2 \ : \ 2L_2^2 = \left(2\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2 \ : \ 2L_2^2 = 2R^2 \ : \ L_2 = R$$

Conocido L_2 se calcula el segundo término de la progresión de las áreas de los cuadrados.

$$B_2 = L_2^2 = R^2$$

Se repiten los mismos razonamientos para calcular los términos A_3 y B_3 y de esta forma poder confirmar que se trata de progresiones geométricas.

$$R_3 = \frac{L_2}{2} = \frac{R}{2} \Rightarrow A_3 = \pi R_3^2 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$

$2R_3$ es la diagonal del cuadrado de lado L_3

$$L_3^2 + L_3^2 = (2R_3)^2 \ : \ 2L_3^2 = \left(2\frac{R}{2}\right)^2 \ : \ 2L_2^2 = R^2 \ : \ L_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$B_3 = L_3^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{R^2}{2}$$

Las progresiones de las áreas serán:

$$A_n = \pi R^2; \frac{\pi R^2}{2}; \frac{\pi R^2}{4}; \ldots..$$

$$B_n = 2R^2; R^2; \frac{R^2}{2}; \ldots..$$

Progresiones geométricas ambas por que el cociente de términos consecutivos es constante e igual a $1/2$, que es la razón.

La suma de los infinitos términos de la progresión A_n será:

$$S = \frac{A_1}{1-r} = \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \pi R^2 \\ r = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi R^2}{\frac{1}{2}} = 2\pi R^2$$

Para la progresión B_n:

$$S = \frac{B_1}{1-r} = \left\{ \begin{array}{l} B_1 = \pi R^2 \\ r = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \frac{2R^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2R^2}{\frac{1}{2}} = 4R^2$$

La suma de todas las áreas será la suma de las dos sumas infinitas

$$\sum \text{Areás} = 2\pi R^2 + 4R^2$$

31. En una progresión geométrica se verifica que r = a_4 y que $a_2 + a_3 = 6$. Calcula el término que ocupa la posición cien y la suma de los cien primeros términos.

Solución.

- $\left. \begin{array}{l} a_4 = r \\ a_4 = a_1 r^3 \end{array} \right\} : a_1 r^3 = r \ : \ a_1 = \frac{1}{r^2}$
- $a_2 + a_3 = 6 \ : \ a_1 r + a_1 r^2 = 6$

Las dos condiciones propuestas en el enunciado permiten plantear un sistema que se resuelve por sustitución.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{r^2} \\ a_1 r + a_1 r^2 = 6 \end{array} \right. : \ \frac{1}{r^2} r + \frac{1}{r^2} r^2 = 6 \ : \ \frac{1}{r} + 1 = 6 \ : \ r = \frac{1}{5} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25$$

Conocido a_1 y la razón se obtiene el término general.

$$a_n = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{5^2}{5^{n-1}} = 5^{3-n}$$

Conocido el término general se calcula el término 100.

$$a_{100} = 5^{3-100} = 5^{-97} = \frac{1}{5^{97}}$$

La suma de los 100 primeros términos será:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \ : \ S_{100} = \frac{a_{100} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{5^{97}} \cdot \frac{1}{5} - 25}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{125}{4}$$